6 Das stationäre elektrische Strömungsfeld

Student Group

First Name	Surname	Matrikel Nr.

Table of Contents

6. Das stationäre elektrische Strömungsfeld 2
6.1 Stromstärke und Strömungsfeld 2
Ziele 2
Stromstärke und Stromdichte im einfachen Fall 2
Feldlinien und Äquipotentialflächen des elektrischen Strömungsfeldes 3
Allgemeines Materialgesetz 5
Aufgabe 6
Aufgabe 6.1.1 durchgerechnete Übungen im Video 6
Aufgabe 6.1.2 Elektronengeschwindigkeit in Kupfer 6
6.2 Gaußscher Satz des Strömungsfeldes 6
Ziele 6
Video 7
Aufgaben 7
Aufgabe 6.2.1 Simulation 7

6. Das stationäre elektrische Strömungsfeld

Im elektrostatischen Feld wurden prinzipiell keine Ladungen in Bewegung betrachtet. Nun soll die Bewegung der Ladungen explizit betrachtet werden.

Das elektrische Strömungsfeld bezeichnet hier wie gemeinsame (kollektive) Bewegung von Ladungsträgern. Das stationäre Strömungsfeld beschreibt dabei die Ladungsträgerbewegung, wenn eine **Gleichspannung** die Ursache der Bewegung ist. Im stationären elektrischen Strömungsfeld fließt dann ein konstanter Gleichstrom. Damit gibt es keine Zeitabhängigkeit des Stroms:

$\large{{dI}{dt}}=0$

Wichtig ist auch: Bisher wurde betrachtet, dass die Ladungen sich durch ein Feld bewegt haben, oder zukünftig bewegt werden könnten. Nun wird gerade der Augenblick der Bewegung betrachtet.

6.1 Stromstärke und Strömungsfeld

Ziele

Nach dieser Lektion sollten Sie:

1. in der Lage sein, das Strömungsfeld in einem eingeschnürten und geradlinigen Leiter zu skizzieren.
2. die Strömungsgeschwindigkeit von Elektronen bestimmen können.
3. die integrale Schreibweise der elektrischen Stromstärke kennen.

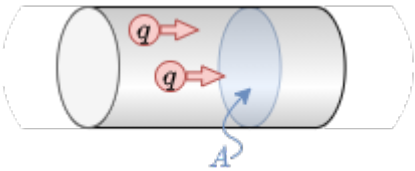


Fig. 1: Teil eines Leiters

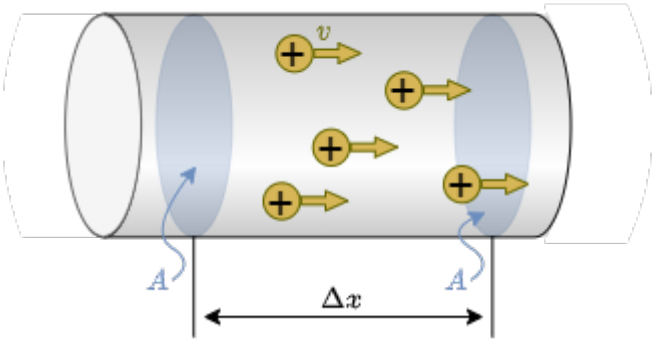
Stromstärke und Stromdichte im einfachen Fall

Die Stromstärke wurde bisher als “Ladung pro Zeit” ($I={{dQ}\over{dt}}$) begriffen. Mikroskopisch betrachtet ist der elektrische Strom die gerichtete Bewegung von elektrischen Ladungsträgern. Im Kapitel Grundlagen und Grundbegriffe sind wir auf das Bild des durch eine Querschnittsfläche A durchdringenden Ladungsträgerstromes bereits eingegangen (siehe figure 1). Weiterhin hatten wir in der Gleichstromtechnik ganz praktisch das ohmsche Gesetz mit $R = {{U}\over{I}}$ angewandt. Nun wissen wir aber, dass aus dem elektrostatischen Feld das die Spannung sich aus der elektrischen

Feldstärke herleiten lässt. Wie ist das aber nun beim Strom?

Dazu wird das Paket dQ an Ladungen betrachtet, welches zukünftig in dem Zeitraum dt die Fläche A passieren wird. Diese Ladungen befinden sich in einem Teilvolumenelement dV, welches durch die zu durchtretende Fläche A und einem Teilabschnitt dx gegeben ist: $dV = A \cdot dx$. Die Menge an Ladungen pro Volumen wird durch die Ladungsträgerdichte angegeben, speziell bei Metallen durch die Elektronendichte n_e. Die Elektronendichte n_e gibt die Anzahl der freien Elektronen je Volumeneinheit a. Diese liegt z.B. bei Kupfer etwa bei $n_e(Cu)=8,47 \cdot 10^{19} {{1}\over{mm^3}}$.

Fig. 2: Ladungen in einem Teilvolumen im Leiter



Die in dem Teilvolumenelement dV enthaltenen, strömenden Ladungen sind dann (mit der Elementarladung e_0):

$$\begin{align*} dQ = n_e \cdot e_0 \cdot A \cdot dx \end{align*}$$

Die Stromstärke ist dann mit $I={{dQ}\over{dt}}$:

$$\begin{align*} dQ = n_e \cdot e_0 \cdot A \cdot {{dx}\cdot{dt}} = n_e \cdot e_0 \cdot A \cdot v_e \end{align*}$$

Es ergibt sich so eine Elektronengeschwindigkeit v_e von:

$$\begin{align*} v_e = {{dx}\cdot{dt}} = {{I}\over{n_e \cdot e_0 \cdot A }} \end{align*}$$

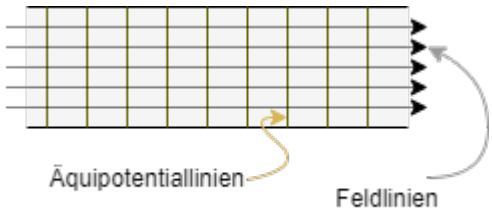
Die Ladungsträge sind also nun - im Gegensatz zu den Betrachtungen in der Elektrostatik mit endlichen Geschwindigkeiten unterwegs. Mit Blick auf die Elektronengeschwindigkeit $v_e \sim {{I}\over{A}}$ liegt es nahe eine (auf die Fläche bezogene) Stromdichte S zu bestimmen:

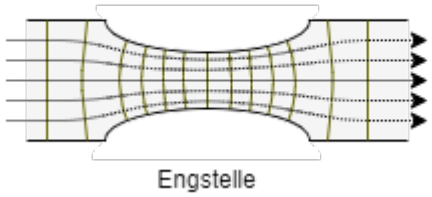
$$\begin{align*} \boxed{S = {{I}\over{A}}} \end{align*}$$

In einigen Büchern wird auch der Buchstabe J für die Stromdichte genutzt.

Feldlinien und Äquipotentialflächen des elektrischen Strömungsfeldes

Fig. 3: Feldlinien und Äquipotentialflächen des elektrischen Strömungsfeldes





Wie auch beim elektrostatischen Feld soll auch hier eine homogene Feldform und die inhomogene Feldform gegenübergestellt werden:

1. Homogenes Strömungsfeld
   z.B. Leiter mit konstantem Querschnitt
   1. Feldlinien des Stroms verlaufen parallel
   2. Äquipotentialflächen
      1. stehen dazu stets senkrecht, da die potentielle Energie einer Ladung nur von der Position entlang des Weges abhängt
      2. sind aufgrund des konstanten elektrischen Feldes, welches den Strom verursacht und der homogenen Geometrie äquidistant
   3. Strom $I = S \cdot A$ ist konstant
      $\rightarrow$ Ladungsträger haben die gleiche Geschwindigkeit v
2. Inhomogenes Strömungsfeld
   Schmelzsicherung oder Verjüngung im Draht
   1. Feldlinien des Stroms verlaufen nicht parallel
   2. Strom $I = S \cdot A$ muss auch konstant sein, da die Ladung nicht verschwindet / erzeugt wird, aber die Fläche A wird geringer
      $\rightarrow$ damit muss die Stromdichte S und die Geschwindigkeit v an der Engstelle größer werden
   3. Äquipotentialflächen
      1. stehen auch dazu wieder senkrecht.
      2. zeigen nun eine Verdichtung bei der Engstelle

Warum ergibt sich aber eine Verdichtung der Äquipotentialflächen bei der Engstelle? Diese bedeutet anschaulich, dass dort eine große Potentialdifferenz, also eine große Spannung abfällt. Das klingt also schon etwas plausibel. Tiefer soll dies gleich nochmal betrachtet werden.

Die Stromdichte wurde nur für eine konstante Querschnittsfläche A bestimmt, durch welche ein homogener Strom, also auch ein homogenes Strömungsfeld, rechtwinklig durchtritt. Nun soll aber ein allgemeiner Ansatz für die elektrische Stromstärke gefunden werden.

Hierzu wird zunächst statt einer konstanten Stromdichte S über einer senkrechten, geraden Querschnittsfläche A, eine variierende Stromdichte $S(A)$ über viele kleine Teilflächen dA betrachtet. Damit kann - wenn die Teilflächen hinreichend klein sind - wieder eine konstante Stromdichte über die Teilfläche erhalten werden. Es wird dann also aus

\begin{align*} I = S \cdot A \rightarrow dI = S \cdot dA \end{align*}

Der Gesamtstrom über eine größere Fläche A ergibt sich somit als:

$$\begin{align*} I = \int dI = \iint_A S \cdot dA \end{align*}$$

Was hierbei aber nicht betrachtet wurde: Die gewählte Fläche A muss nicht zwangsläufig senkrecht auf der Stromdichte S stehen. Um dies zu berücksichtigen kann der (Teil)Flächennormalenvektor $d\vec{A}$ genutzt werden. Wenn nur der Teil der Stromdichte $\vec{S}$ betrachtet werden soll, welcher in Richtung von $d\vec{A}$ wirkend, so lässt sich dies über das Skalarprodukt ermitteln:

$$\begin{align*} I = \int dI = \iint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} \end{align*}$$

Dies stellt die integrale Schreibweise der elektrischen Stromstärke dar. Mit dieser lässt sich die Stromstärke in einem beliebigen Feld ermitteln.

Allgemeines Materialgesetz

Für eine “pragmatische” Herleitung des allgemeinen Materialgesetzes zur Stromdichte soll nun nochmal auf die Verdichtung der Äquipotentialflächen bei der Engstelle eingegangen werden. Zwischen zwei Äquipotentialflächen ist eine Spannungsdifferenz ΔU vorhanden. Wählt man diese hinreichend klein ergibt sich wieder der Übergang von $\Delta U \rightarrow dU$. Durch die Potentialflächen muss aber im Leiter stets der gleiche Strom I fließen. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich dann für den Teilwiderstand dR zwischen den zwei Äquipotentialflächen:

$$\begin{align*} dU = I \cdot dR \tag{6.1.1} \end{align*}$$

Die einzelnen Größen sollen nun für infinitesimal kleine Teilstücke betrachtet werden. Für I wurde dazu schon eine Gleichung über eine Dichte - die Stromdichte - gefunden:

$$\begin{align*} I = S \cdot A \tag{6.1.2} \end{align*}$$

Aber auch R wurde bereits schon durch eine “Dichte” - dem spezifischen Widerstand ϱ - ausgedrückt: $ R = \varrho \cdot {{l}\over{A}}$

Wenn ein Leiter aus dem gleichen Material betrachtet wird, ist der spezifische Widerstand ϱ überall gleich. Ist aber nun entlang des Leiters ein Teilstück ds vorhanden, bei dem der Querschnitt A kleiner ist, so ändert sich auch der Widerstand dR dieses Teilelements. Der Teilwiderstand ist dann:

$$\begin{align*} dR = \varrho \cdot {{ds}\over{A}} \tag{6.1.3} \end{align*}$$

Konkret heißt dass also für die Engstelle: An der Engstelle steigt der Widerstand. Damit steigt dort auch der Spannungsabfall. Damit gibt es dort auch mehr Äquipotentialflächen.

Die Anreicherung der Äquipotentialflächen wäre damit gelöst. Interessanterweise lässt sich aber mit dem Gedankenmodell nun auch für einen homogenen Körper das allgemeine Materialgesetz erklären. Dazu fügt man Gleichung $(6.1.2)$ und $(6.1.3)$ in $(6.1.)$ ein. Dann ergibt sich:

$$\begin{align*} dU = I \cdot dR = S \cdot A \cdot \varrho \cdot {{ds}\over{{A}}} = \varrho \cdot S \cdot ds \\ \end{align*}$$

Wird nun die elektrische Feldstärke als $E={{dU}\over{ds}}$ eingefügt, erhält man:

$$\begin{align*} E = {{dU}\over{ds}} = \varrho \cdot S \end{align*}$$

Mit einer ausführlicheren (und mathematisch korrekten) Herleitung erhält man:

$$\boxed{\vec{E} = \varrho \cdot \vec{S}}$$

Diese Gleichung drückt aus, wie das elektrische Feld $\vec{E}$ und das (stationäre) elektrische Strömungsfeld $\vec{S}$ zusammenhängen: beide zeigen in die gleiche Richtung. Bei einem vorgegebenen, elektrischen Feld $\vec{E}$ in einem homogenen Leiter wird das Strömungsfeld $\vec{S}$ um so größer, je kleiner der spezifische Widerstand ϱ ist.

Aufgabe

Aufgabe 6.1.1 durchgerechnete Übungen im Video

Beispiele zur elektrischen Stromdichte

Aufgabe 6.1.2 Elektronengeschwindigkeit in Kupfer

In einem Leiter aus Kupfer mit der Querschnittsfläche A fließt der Strom $I = 20A$.
Gegeben sei weiterhin die Elektronendichte $n_e(Cu)=8,47 \cdot 10^{19} {{1}\over{mm^3}}$ und den Betrag der Elementarladung $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} As$

1. Wie groß ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $v_{e,1}$ der Elektronen, wenn die Querschnittsfläche des Leiters $A = 1,5mm^2$ beträgt?
2. Wie groß ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $v_{e,1}$ der Elektronen, wenn die Querschnittsfläche des Leiters $A = 1,0mm^2$ beträgt?

6.2 Gaußscher Satz des Strömungsfeldes

Ziele

Nach dieser Lektion sollten Sie:

1. wissen, welche Größen beim elektrostatischen Feld und beim Strömungsfeld vergleichbar

sind.
2. anhand von Hüllflächen den Verschiebungsstrom erklären können.
3. verstanden haben wie der Strom “durch” einen Kondensator fließen kann.

Video

Warum fließt ein Elektronen durch einen Kondensator

Aufgaben

Aufgabe 6.2.1 Simulation

Im Simulationsprogramm von Falstad können von Äquipotentialflächen, elektrischer Feldstärke und Stromdichte in verschiedenen Objekten dargestellt werden.

1. Öffnen Sie das Simulationsprogramm über den Link
2. Wählen Sie: “Setup: Wire w/ Current” und “Show Current (j)”
3. Sie sehen nun einen endlichen Leiter, bei dem am oberen Ende Ladungsträger starten und am unteren Ende ankommen.
4. Wir wollen nun beobachten, was bei Verjüngungen im Leiter passiert.
    1. Wählen Sie dazu “Mouse = Clear Square”. Sie können nun mit Hilfe der linken Maustaste vom leitenden Material Teile entfernen. Ziel soll sein, dass etwas in der Mitte des Leiters nur noch eine ein Kästchen breite Leitung liegt, auf einer Länge von wenigstens 10 Kästchen. Falls Sie wieder leitendes Material hinzufügen wollen, ist dies mit “Mouse = Add - Conductor” möglich.
    2. Überlegen Sie sich, warum sich bei der Verjüngung des Leiters nun mehr Äquipotentiallinien ansammeln.
    3. Wenn Sie auf zusätzlich mit “Show E/j” das E-Feld einzeichnen, sehen Sie, das dieses entlang der Verjüngung stärker ist. Dies lässt sich über den Schieberegler “Brightness” überprüfen. Warum ist das so?
5. Wählen Sie “Setup: Current in 2D 1”, “Show E/rho/j”. Warum Verhält sich der Hohlraum hier nicht wie ein Faradayscher Käfig?

From:
https://mexle.te.hs-heilbronn.de/ - **MEXLE Wiki**

Permanent link:
https://mexle.te.hs-heilbronn.de/elektrotechnik_1/das_stationaere_elektrische_stroemungsfeld?rev=1620551700

Last update: **2021/05/09 11:15**