

6 Filterschaltungen II - Filter höherer Ordnung

Student Group

First Name	Surname	Matrikel Nr.

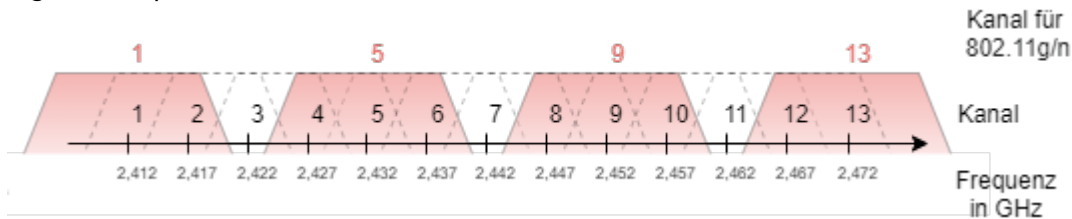
Table of Contents

6 Filterschaltungen II - Filter höherer Ordnung	2
6.1 Bandpassfilter	2
Bereiche im Frequenzgang	2
Zusammensetzen des Bandpass Filter	3
Amplitudengang des Bandpass Filter	4
6.1.1 Bandpass auf Basis des invertierenden Verstärkers	4
Realisation	5
komplexwertige Betrachtung der Übertragungsfunktion	5
Ermittlung von Betrag und Phase aus der komplexwertigen Betrachtung	6
Aufgabe 6.1.1 Bandpass auf Basis des invertierenden Verstärkers	8
6.1.2 Multi-Feedback Bandpass	9
6.2 Bandsperre	10
Hausarbeiten	10
Referenzen	11

6 Filterschaltungen II - Filter höherer Ordnung

6.1 Bandpassfilter

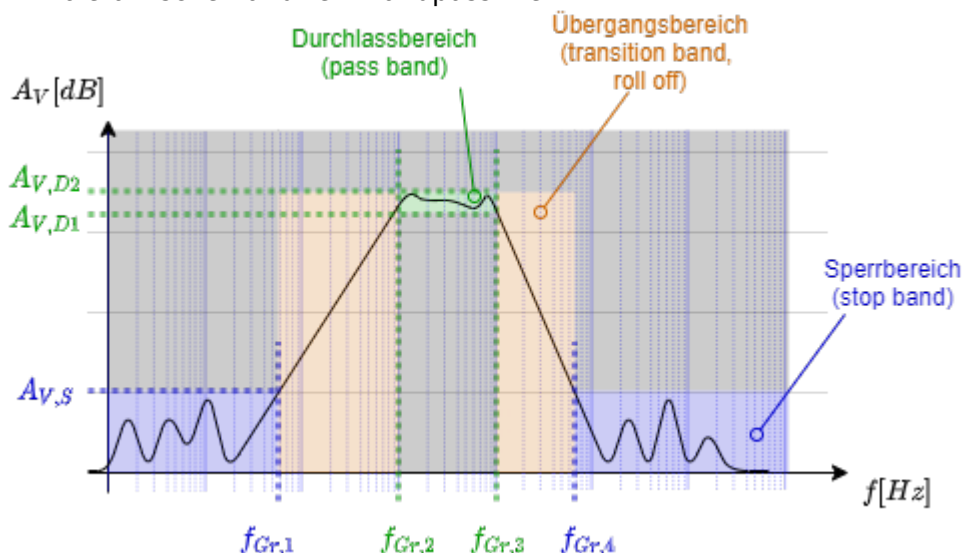
Fig. 1: Beispiel: WLAN-Kanäle



Bei der Analyse unterschiedlicher Signale ist nur ein Teil des gesamten Frequenzspektrums gewünscht. In [figure 1](#) sind als Beispiel die Kanäle des WLAN Standards 802.11 dargestellt; Diese werden abwechselnd zur Datenübertragung genutzt. Ein weiteres Beispiel ergibt sich bei Schwingungsspektren eines Motors in einer Maschine, welche nicht nur die (zur Diagnose verwendbaren) Schwingungen enthält, sondern auch Störungen durch andere Maschinenteile. Andere Beispiele ist die kabelgebundene Datenübertragung oder die [Bänder der Gehirnwellen](#).

Zur Separierung der gewünschten Frequenzen kann ein Filter genutzt werden, welcher nur ein vorgegebenes Band zwischen zwei Frequenzen (*Frequenzband*) durchlässt. Dies ist mit einem **Bandpassfilter** möglich.

Fig. 2: Toleranzschema für ein Bandpassfilter

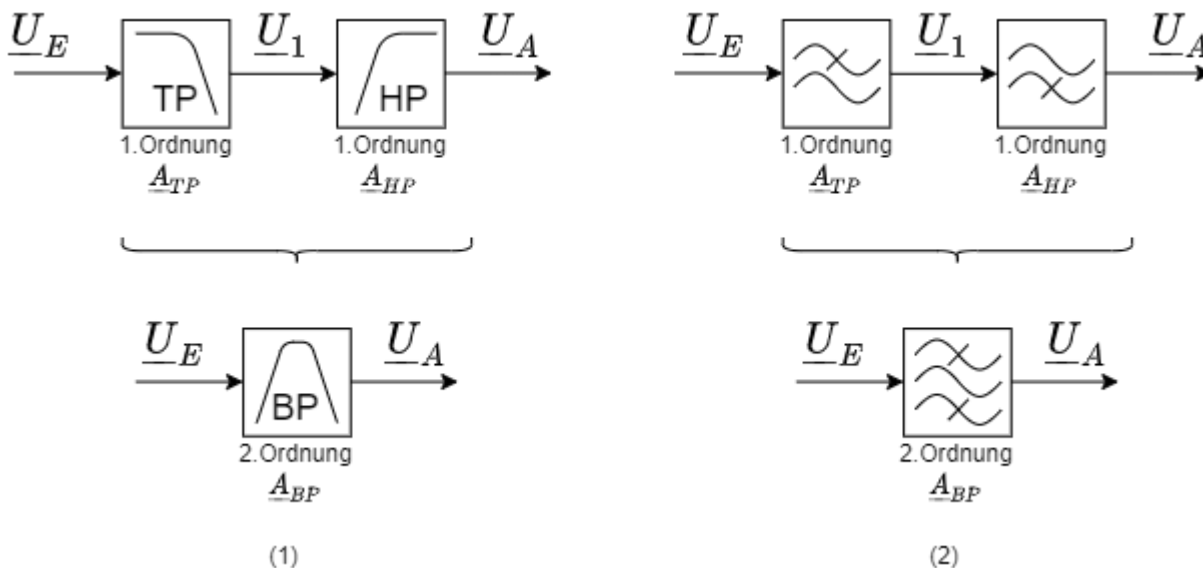


Bereiche im Frequenzgang

Den Bereich zwischen den zwei Frequenzen nennt man **Durchlassbereich**, oder Bandbreite. Außerhalb des Durchlassbereichs fällt die Verstärkung ab. Ein reelles Filter kann nicht unendlich stark abschwächen. Auch gibt es verschiedene ideale Filtern, bei denen außerhalb des Durchlassbereichs

nicht Verstärkung nicht gegen Null strebt, sondern nur ein Schwelle unterschreitet. Häufig wird der abfallende Bereich **Übergangsbereich** genannt und der Bereich unterhalb der Schwelle **Sperrbereich**. Die Schwelle selbst nennt man **Sperrdämpfung**. In [figure 2](#) sind die Bereiche eingezeichnet. Die Begriffe sind aber nicht eindeutig definiert; in verschiedenen Lehrbüchern wird bereits der Übergangsbereich als Sperrbereich bezeichnet.

Fig. 3: Blockschaltbild Bandpass

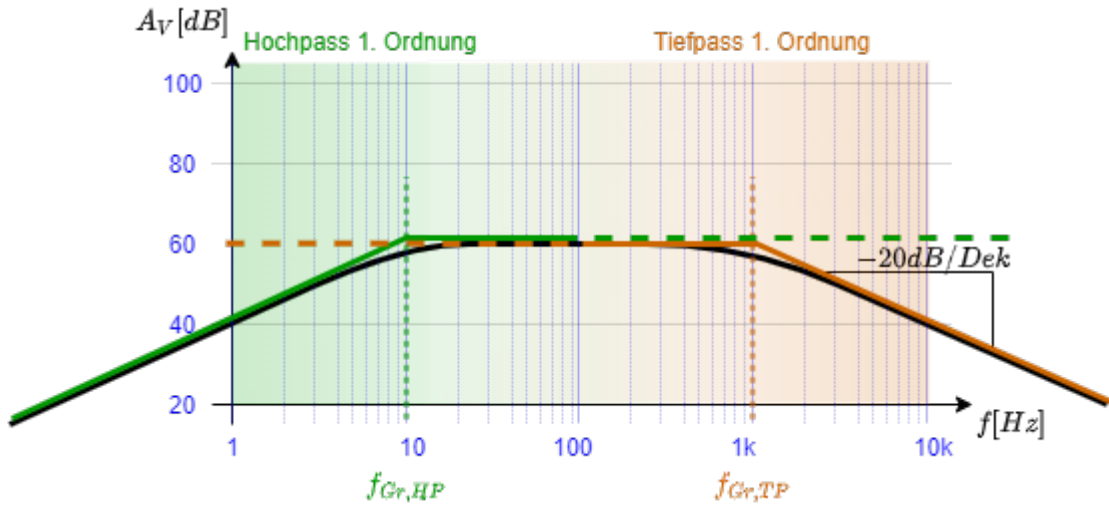


Zusammensetzen des Bandpass Filter

Dieses Filter lässt sich über durch grundlegenden Tief- und Hochpassfilter zusammensetzen. Wird zunächst der Signal durch einen Tiefpass und anschließend durch einen Hochpass gefiltert, so entsteht das gewünschte Filter. Die Reihenfolge der Filter kann vertauscht werden. [figure 3](#) zeigt dies im Blockschaltbild - dabei ist in (1) ein häufig genutzte und in (2) mit den nach EN 60617 zu verwendenden Schaltzeichen. Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion \underline{A}_{BP} des Bandpasses einfach aus der Übertragungsfunktion der Tief- und Hochpassfilter \underline{A}_{TP} und \underline{A}_{HP} , da das Signal nacheinander durch die Filterstufen läuft:

$$\underline{A}_{BP} = \left\{ \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} \right\} = \left\{ \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_1} \cdot \left\{ \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_E} \right\} \right\} = \underline{A}_{TP} \cdot \underline{A}_{HP}$$

Fig. 4: Amplitudengang Bandpass



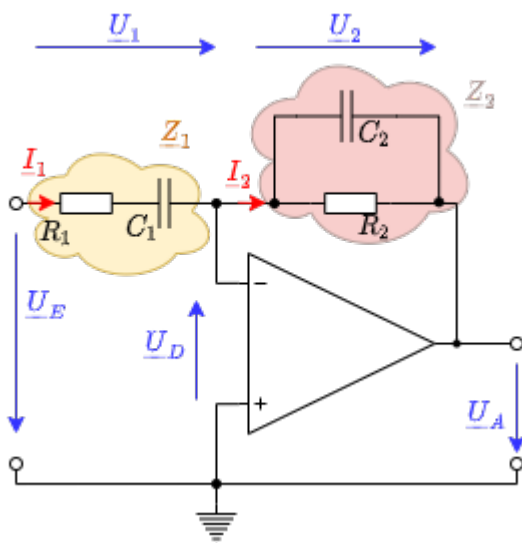
Amplitudengang des Bandpass Filter

In figure 4 ist der Amplitudengang des Bandpassfilter zu sehen. Da im Amplitudengang die Übertragungsfunktion in dB ($\underline{A}^{\text{dB}}$) dargestellt wird, ergibt sich aus der Multiplikation der Übertragungsfunktion der Tief- und Hochpassfilter \underline{A}_{TP} und \underline{A}_{HP} eine Addition von $\underline{A}_{TP}^{\text{dB}}$ und $\underline{A}_{HP}^{\text{dB}}$. Im Amplitudengang ist zu sehen, dass es zweimal eine Änderung um 20 dB/Dek ergibt: einmal bei $f_{Gr,HP}$ und einmal bei $f_{Gr,TP}$. Das Filter hat also eine Ordnung von 2.

Wichtig dabei: Die Grenzfrequenz des Tiefpassfilter $f_{Gr,TP}$ muss größer sein, als die Grenzfrequenz des Hochpassfilter $f_{Gr,HP}$ (siehe figure 4).

Wie sieht aber nun der Frequenzgang aus? Dies soll im Folgenden hergeleitet werden.

Fig. 5: Schaltung des Bandpassfilter auf Basis des invertierenden Verstärkers



6.1.1 Bandpass auf Basis des invertierenden Verstärkers

Realisation

Aus [Kapitel 5](#) sind die Schaltungen von Hochpass- und Tiefpass-Filter bekannt. Daraus lässt sich die in [figure 5](#) dargestellte Schaltung ableiten. Diese soll etwas näher betrachtet werden.

Die Extremalwertbetrachtung ergibt:

- für $\omega \rightarrow 0$:
Der Betrag der Impedanz der Kapazitäten wird groß und damit ist $|X_{C_1}| \gg R_1$, sowie $|X_{C_2}| \gg R_2$. Es überwiegt also X_{C_1} bei Z_1 und R_2 bei Z_2 .
 \rightarrow **Bei tiefen Frequenzen ergibt sich ein Umkehr-Differentiator.**
- für $\omega \rightarrow \infty$:
Der Betrag der Impedanz der Kapazitäten wird klein und damit ist $|X_{C_1}| \ll R_1$, sowie $|X_{C_2}| \ll R_2$. Es überwiegt also R_1 bei Z_1 und X_{C_2} bei Z_2 .
 \rightarrow **Bei hohen Frequenzen ergibt sich ein Umkehr-Integrator.**

komplexwertige Betrachtung der Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion soll wieder aus einem komplexwertigen, invertierenden Verstärker hergeleitet werden:

$$\underline{A}_V = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = - \frac{Z_2}{Z_1} = - \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = - \frac{R_2}{j\omega C_2 R_2 + 1} \cdot \frac{j\omega C_1 R_1}{j\omega C_1 R_1 + 1}$$

$$\boxed{\underline{A}_V = - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2} \cdot \frac{j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}}$$

Durch die geschickte Umformung ergibt sich ein interessantes Ergebnis aus folgenden Teilen:

1. $-\frac{R_2}{R_1}$: Dies entspricht einem [invertierenden Verstärker](#)
2. $\frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2}$: Dies entspricht einem [Tiefpass 1. Ordnung](#) mit einer Grenzfrequenz von $\omega_{Gr, TP} = \frac{1}{C_2 R_2}$
3. $\frac{j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}$: Dies entspricht einem [Hochpass 1. Ordnung](#) mit einer Grenzfrequenz von $\omega_{Gr, HP} = \frac{1}{C_1 R_1}$

Damit ergibt sich über die Extremalwertbetrachtung als Funktion:

- für $\omega \rightarrow 0$:
 $\underline{A}_V = - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2} \cdot \frac{j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}$

$$\underbrace{\color{teal}{j\omega \cdot C_2 R_2}}_{\rightarrow 0} \cdot \color{brown}{\frac{j\omega \cdot C_1 R_1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1}} \rightarrow 0$$

$$\color{brown}{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \color{teal}{\frac{1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1}} \cdot \color{brown}{\frac{j\omega \cdot C_1 R_1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1}} \rightarrow -\frac{R_2}{R_1} \cdot \color{teal}{\frac{1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1}}$$

$$\color{brown}{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \color{black}{\frac{1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1}}$$
 Die Gleichung entspricht der eines Umkehr-Differentiators

- für $\omega \rightarrow \infty$:

$$\underline{A}_V = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot C_2 R_2} \cdot \frac{j\omega \cdot C_1 R_1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1} \rightarrow -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot C_2 R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1}$$
 Die Gleichung entspricht der eines Umkehr-Integrators

Ermittlung von Betrag und Phase aus der komplexwertigen Betrachtung

Für den Betrag $|\underline{A}_V|$ der Übertragungsfunktion kann folgender Tipp genutzt werden:

$$|a \cdot b \cdot c| = |a| \cdot |b| \cdot |c|$$

Damit ergibt sich für den Betrag $|\underline{A}_V|$:

$$|\underline{A}_V| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C_2^2 R_2^2}} \cdot \frac{\omega \cdot C_1 R_1}{\sqrt{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2}}$$

$$\rightarrow \omega_{Gr, TP}, \omega_{Gr, HP}$$

$$\boxed{|\underline{A}_V| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C_2^2 R_2^2}} \cdot \frac{\omega \cdot C_1 R_1}{\sqrt{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2}}}$$

Für die Phase φ muss wieder konjugiert komplex erweitert werden.

Dies erzeugt zwar zunächst eine unhandliche Gleichung - aus dieser kann aber eine realwertige Konstante abgetrennt werden.

$$\underline{A}_V = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot C_2 R_2} \cdot \frac{j\omega \cdot C_1 R_1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1}$$

$$= \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{j\omega \cdot C_1 R_1}{(1 + j\omega \cdot C_2 R_2)(1 + j\omega \cdot C_1 R_1)}$$

$$\underline{A}_V = \frac{1}{1 + j\omega \cdot C_2 R_2} \cdot \frac{j\omega \cdot C_1 R_1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1}$$

$$\underline{A}_V = \frac{1}{1 + j\omega \cdot C_2 R_2} \cdot \frac{j\omega \cdot C_1 R_1}{1 + j\omega \cdot C_1 R_1}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich einfach die Anteile für Realteil $Re(\underline{A}_V)$ und Imaginärteil $Im(\underline{A}_V)$ ablesen.

Damit ergibt sich für die Phase φ :

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{A}_V)}{\operatorname{Re}(\underline{A}_V)} \right) = \arctan \left(\frac{1 - \omega R_1 C_1 \omega R_2 C_2}{\omega R_2 C_2 + \omega R_1 C_1} \right)$$

$$\xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_{Gr, TP}, \omega \rightarrow \omega_{Gr, HP}}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan \left(\frac{\omega_{Gr, TP}}{\omega_{Gr, HP}} - \omega^2 \right) \left(\omega_{Gr, TP} + \omega_{Gr, HP} \right)}$$

Die Formel für die Phase φ sagt Die Extremalwertbetrachtung kann nun für einige markante Frequenzen geführt werden:

- für $\omega \rightarrow 0$:
 $\varphi(0) = \arctan \left(\frac{\mathcal{C}_1 - \omega^2}{\omega \mathcal{C}_2} \right) \rightarrow \arctan \left(\frac{\mathcal{C}_1 - 0}{0} \right) = \arctan(+\infty)$
- für $\omega \rightarrow \infty$:
 $\varphi(\infty) = \arctan \left(\frac{\mathcal{C}_1 - \omega^2}{\omega \mathcal{C}_2} \right) \rightarrow \arctan \left(\frac{\mathcal{C}_1 - \infty^2}{\infty} \right) = \arctan(-\infty)$
- für eine **(Kreis)Frequenz** $\omega = \omega_0$ **für die das Argument der \arctan -Funktion Null wird.**
 Damit wird die Phase:
 $\varphi(\omega_0) = \arctan(0)$.
 Die entsprechende Frequenz ergibt sich zu:

$$\frac{\omega_{Gr, TP} \omega_{Gr, HP} - \omega^2}{\omega (\omega_{Gr, TP} + \omega_{Gr, HP})} = 0$$

$$\rightarrow \omega_0^2 = \omega_{Gr, TP} \omega_{Gr, HP}$$

$$\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_{Gr, TP} \omega_{Gr, HP}}$$
- für die Grenzfrequenz des Hochpassfilter $\omega = \omega_{Gr, HP} = \frac{1}{R_1 C_1}$.
 Hierfür kann bei hinreichend großem Durchlassbereich $\omega_{Gr, HP} \ll \omega_{Gr, TP}$ angenommen werden.
 Damit ergibt sich:

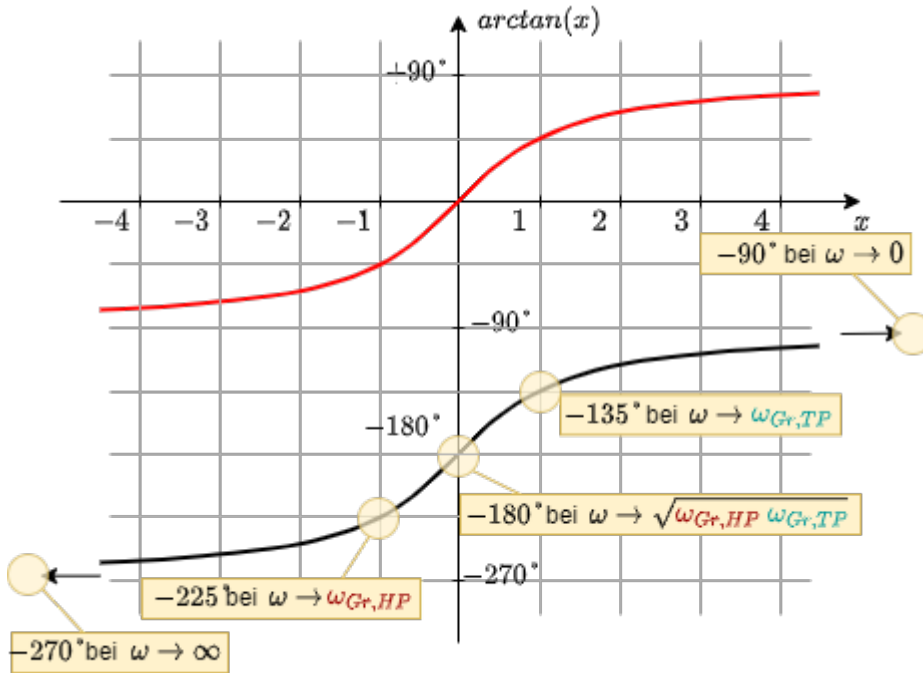
$$\varphi(\omega_{Gr, HP}) = \arctan \left(\frac{\omega_{Gr, TP} \omega_{Gr, HP} - \omega_{Gr, HP}^2}{\omega_{Gr, HP} (\omega_{Gr, TP} + \omega_{Gr, HP})} \right) = \arctan \left(\frac{\omega_{Gr, TP} - \omega_{Gr, HP}}{\omega_{Gr, TP} + \omega_{Gr, HP}} \right)$$

$$\xrightarrow{\omega_{Gr, HP} \ll \omega_{Gr, TP}} \varphi(\omega_{Gr, HP}) = \arctan(1)$$
- für die Grenzfrequenz des Tiefpassfilter $\omega = \omega_{Gr, TP} = \frac{1}{R_2 C_2}$.
 Hierfür kann bei hinreichend großem Durchlassbereich $\omega_{Gr, HP} \gg \omega_{Gr, TP}$ angenommen werden.
 Damit ergibt sich:

$$\varphi(\omega_{Gr, TP}) = \arctan \left(\frac{\omega_{Gr, TP}}{\omega_{Gr, HP}} - \omega_{Gr, TP}^2 \right)$$

$$\arctan\left(\frac{\omega_{Gr, HP}^2 - \omega_{Gr, TP}^2}{\omega_{Gr, TP}(\omega_{Gr, HP}^2 + \omega_{Gr, TP}^2)}\right) \xrightarrow{\omega_{Gr, HP} \gg \omega_{Gr, TP}} \arctan(-1)$$

Fig. 6: Arcus Tangens für Bandpass



Es ergibt sich damit für einzelne Punkte:

ω	$\rightarrow 0$	$\omega_{Gr, HP}$	$\sqrt{\omega_{Gr, TP} \omega_{Gr, HP}}$	$\omega_{Gr, TP}$	$\rightarrow \infty$
φ	$\arctan(+\infty)$	$\arctan(+1)$	$\arctan(0)$	$\arctan(-1)$	$\arctan(-\infty)$
	$+90^\circ$	$+45^\circ$	0°	-45°	-90°

Die Ergebnisse scheinen auch mit dem Verlauf des Arcus Tangens plausibel zu sein (rote Kurve in figure 6): Für niedrige Frequenzen geht das Argument des Arcus Tangens gegen $+\infty$ und damit scheint die Phase φ gegen $+90^\circ$ zu gehen, für hohe Frequenzen gegen -90° .

ABER: Betrachtet man den Phasenverlauf in der Simulation unten, zeigt sich eher ein Verlauf, der mit der schwarzen Linie einhergeht.

Aufgabe 6.1.1 Bandpass auf Basis des invertierenden Verstärkers

1. Betrachten Sie nochmals die Übertragungsfunktion und ermitteln Sie die komplexe Verstärkung für $\omega_0 = \sqrt{\omega_{Gr, TP}}$

$\omega_{Gr, HP}$.

Ist dieser Wert positiv (= keine Phasenverschiebung) oder negativ (= Phasenverschiebung um $\pm 180^\circ$)?

2. Betrachten Sie die Schaltung in der Simulation unten an den folgenden Punkten:
 1. Anstieg um +20dB/Dek bei niedrigen Frequenzen
 2. Mitte des Durchlassbereichs ("Plateau")
 3. Abfall um -20dB/Dek bei hohen Frequenzen

Welcher Kondensator verhält sich dabei jeweils wie ein Kurzschluss?

Mit der Kenntnis des Verhaltens der Kondensatoren: Welche Ersatzschaltung beschreibt das System im Durchlassbereich?

Damit lässt sich das Bodediagramm ermitteln.

6.1.2 Multi-Feedback Bandpass

Fig. 6: Schaltung des Multi-Feedback Bandpass Filter

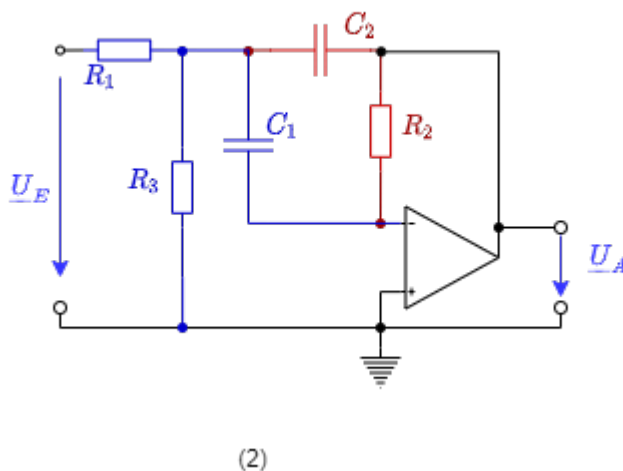
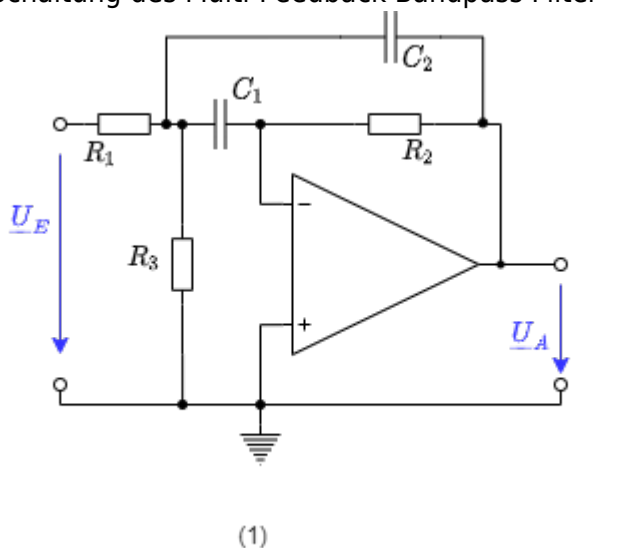
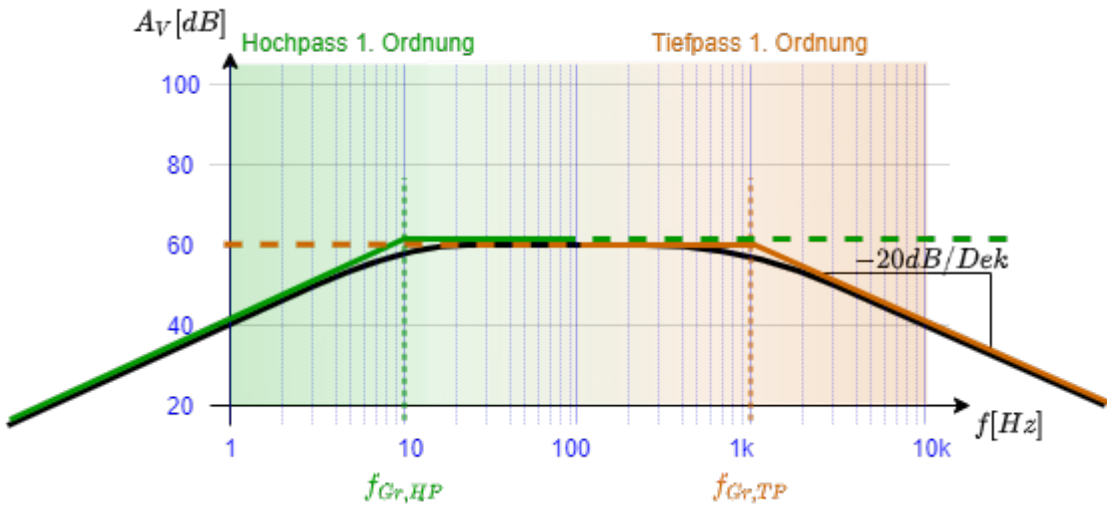


Fig. 8: Bodediagramm Bandpass



6.2 Bandsperre

Elektrotechnik 2 und Elektrotechnik Labor haben bereits Einblicke in Schwingkreise gegeben. In diesen Schaltungen ergeben sich bei bestimmte Frequenzen Schwingungen, die Energien aus dem System aufnehmen können

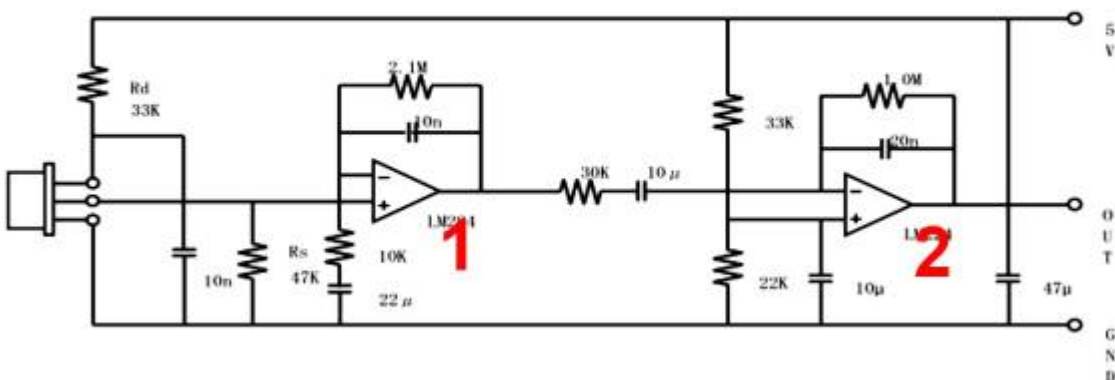
Von der Seite www.geogebra.org/m/zhvkeaa8, Autor: Tim Fischer.

Hausarbeiten

Beispiel: Auswertung eines Infrarot-Sensors:

- Vom Hersteller fehlen die Knoten in der Schaltung --> korrekte Schaltung ist zu zeichnen
- welchen Grundsaltungen entspricht OPV 1 und 2? Welchen Filtern entsprechen beide?

Circuit (Ref. Circuit Diagram)



Referenzen

Referenzen zu den genutzten Medien

Element	Lizenz	Link
figure ##: Überlagerung von sinusförmigen Schwingungen	Public Domain	https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fourier_transform_time_and_frequency_domains.gif
figure 8: Überlagerung von sinusförmigen Schwingungen	CC-BY SA 3.0	https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fourier_series_square_wave_circles_animation.gif
figure 6: Überlagerung von sinusförmigen Schwingungen	CC-BY SA 4.0	https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Example_of_Fourier_Convergence.gif

<--

From:
<https://mexle.te.hs-heilbronn.de/> - **MEXLE Wiki**

Permanent link:
https://mexle.te.hs-heilbronn.de/elektronische_schaltungstechnik/6_filterschaltungen_ii

Last update: **2023/09/19 23:09**

